Системы счисления и перевод между ними.

Методика преподавания темы на уроках в 8-11 классах общеобразовательной школы (авторская разработка)

Для максимально быстрого и однозначно верного решения задач будем придерживаться принципа: чем меньше вычислений и другой работы мы делаем, тем меньше вероятность появления ошибок и лучший по качественный результат!

При изучении этой темы обращаю особое внимание на т*аблицу степеней двойки* и на *ряд закономерностей*, использование которых служат изложенному выше принципу. При этом знание таблицы степеней двойки и являются необходимыми и достаточным условием для максимально быстрого и однозначно точного решения, а дополнительное знание закономерностей позволит выполнить все еще быстрее и точнее.

Ниже приведена таблица степеней двойки, где **n** – это степень, а $\mathbf{2^n}$- результат возведения числа 2 в степень n:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{2^n}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Таблицу не обязательно заранее учить наизусть. Постарайтесь при решении задач пользоваться ею, но при этом заглядывать в нее все реже и реже, пытаясь сначала вспомнить значение степени. Тогда эта таблица сама «уляжется» в Вашей голове и очень поможет Вам на экзамене в этой и в других темах!

Но вначале ***немного теории***, без которой здесь не обойтись.

Система счисления – это способ записи (обозначения) чисел.

Возьмем это за основу работы с разными системами счисления, поскольку *только способ записи у них будет разный, а все закономерности одинаковые*. Поэтому в случае возникновения трудностей в понимании темы обращаемся к десятичной системе счисления и переносим аналог на остальные.

Символы, при помощи которых записываются числа, называются *цифрами*, а их совокупность – *алфавитом* системы счисления. Количество цифр, составляющих алфавит, называется его *основанием* (размерностью). *Число* в любой системе счисления *состоит из цифр,* входящих в алфавит этой системы.

Основание алфавита указывается в виде индекса числа, записанного в десятичной системе счисления, например: $\mathbf{1011_2}$, $\mathbf{152_8}$, $\mathbf{1A7_{16}}$

Индекс десятичной системы счисления обычно не указывается, так как она принята всеми к использованию по умолчанию.

Закономерность № 1.

- *Наименьшей цифрой в алфавите любой системе счисления является ноль, а наибольшая цифра всегда на единицу меньше основания.*

Система счисления называется *позиционной*, если количественный эквивалент цифры зависит от ее положения в записи числа.
Например, в десятичной системе счисления:

3142 = 3*1000 + 1*100 + 4*10 + 2*1

2413 = 2*1000 + 2*100 + 1*10 + 3*1

$4231 = 4*1000 + 2*100 + 3*10 + 1*1$

Таким образом, числа, составленные из одних и тех же цифр, но стоящих в числах на разных позициях, имеют различные значения (математический вес).

Самым ярким примером *непозиционной* системы счисления является известная всем *римская система счисления,* в которой каждый символ обозначает всегда одно и тоже число не зависимо от его позиции в числе. Не будем на ней останавливаться, так как непозиционные системы счисления не входят в программу нашего курса.

Как и в привычной нам десятичной, так и *в любой* другой *позиционной системе счисления значение числа образуется из суммы произведений цифр числа на «веса» (степени основания) соответствующих разрядов*.

Например, $3948 = 3*1000+9*100+4*10+8*1$

$1011_2 = 1*2^3+0*2^2+1*2^1+1*2^0$

или $1011_2 = 1*2^0+1*2^1+0*2^2+1*2^3$

(далее будем пользоваться последней формой записи, чтобы не делать лишних действий и не нумеровать степени двойки слева направо, как это обычно принято делать).

Будем называть позиционные системы счисления *дружественными* (родственными), если в основании у них лежит одно и то же число, но в разных степенях. При этом «дружат» они через систему счисления с основанием в первой степени.

Например, двоичная, четверичная, восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления «дружат» через двоичную, т.к. в основании у них лежит число 2, но в разных степенях:

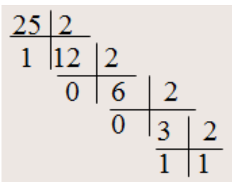
$2=2^1$, $4=2^2$, $8=2^3$, $16=2^4$

Будем считать, что *десятичная система счисления не дружит ни с какой другой*, так как ближайшая к ней система счисления с основанием 100 в практических вычислениях нам не встречается.

Правила перевода между различными системами счисления делятся на две группы – перевод между дружественными и недружественными системами.

*Перевод <u>между недружественными</u> системами счисления **всегда** выполняется через **десятичную** систему следующим образом:*

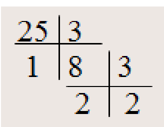
- *из десятичной системы счисления в любую* – делением исходного числа на основание системы счисления, в которую переводим; при этом остатки от деления и последнее частное должны быть меньше этого основания. Частное и остатки от деления собираются справа налево.
- *из любой системы счисления в десятичную* - умножением цифр на «веса» (степени основания) соответствующих разрядов и все полученные значения складываются.



Например, переведем десятичное число 25 в двоичную систему счисления:

Тогда $\mathbf{25_{10} = 11001_2}$

и обратно $\mathbf{11001_2 = 1*2^0+0*2^1+0*2^2+1*2^3+1*2^4}$

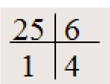


Переведем это же число еще в различные системы счисления:

Тогда $\mathbf{25_{10} = 221_3}$

обратно $\mathbf{221_3 = 1*3^0+2*3^1+2*3^2}$

и



$\mathbf{25_{10} = 41_6}$ и обратно $\mathbf{41_6 = 1*6^0+4*6^1}$

Для быстрого и точного перевода *__между дружественными__* *__(причем только между ними!)__* *двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системами счисления* построим таблицу соответствия восьмеричных и шестнадцатеричных чисел двоичным, и назовем эту таблицу *таблицей «дружбы».* Левая часть этой таблицы включает цифры восьмеричной системы счисления, а правая дополняет ее для всех цифр шестнадцатеричной системы счисления.

Заметим, что так как каждая цифра в любой системе счисления занимает только одну позицию (один разряд числа), то *в шестнадцатеричной системе счисления для записи цифр со значением больше 9 (10, 11 и т.д. здесь – это цифры!) используют латинские заглавные буквы от A до F .*

8 с/сч	2 с/сч
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

16 с/сч	2-ая
8	1000
9	1001
10 (A)	1010
11 (B)	1011
12 (C)	1100
13 (D)	1101
14 (E)	1110
15 (F)	1111

Данная таблица разделена двойными линиями в местах условного ее разделения на дружественные системы счисления (двоичную, четверичную, восьмеричную и шестнадцатеричную).

Обратите внимание, что *длина чивел в двоичной системе счисления зависит от степени двойки в основании дружественной системы счисления:*

- т.к**. $8=2^3$**, то при переводе из восьмеричной системы счисления в двоичную мы записываем каждое двоичное число **тремя разрядами** (триадами);
- т.к**. $16=2^4$**, то при переводе из восьмеричной системы счисления в двоичную мы записываем каждое двоичное число **четырьмя разрядами** (тетрадами);

*Именно это позволяет **легко осуществлять перевод между дружественными системами счисления, записывая каждую цифру исходного числа соответствующей ему в таблице двоичной цифрой с учетом того, чтобы длина двоичной цифры при этом строго соответствовала степени двойки основания исходной системы счисления*.**

Например,

$$\mathbf{152_8 = 001\ 101\ 010_2 = 1\ 101\ 010_2}$$

(при этом первые два нуля не указываются, т.к. они незначащие), а

$$\mathbf{152_{16} = 0001\ 0101\ 0010_2 = 1\ 0101\ 0010_2}$$

(при этом первые три нуля также не указываются).

А теперь выполним перевод из восьмеричной системы счисления шестнадцатеричную и обратно через двоичную систему счисления.

__Перегруппировка__ двоичных разрядов по четыре и по три во второй части выражений *выполняется* *__справа налево__* по количеству разрядов в степени результирующей системы счисления, а *дальнейшая запись числа – как обычно, слева направо*.

Например, $152_8 = 1\,101\,010_2 = 110\,1010_2 = 6A_{16}$

$152_{16} = 1\,0101\,0010_2 = 101\,010\,010_2 = 522_8$

Теперь обратим внимание еще на несколько закономерностей, которые можно заметить в вышеприведенной таблице «дружбы» и аналогичных ей таблицах других систем счисления, в том числе и десятичной.

Закономерность № 2.

- *Любое основание в своей системе счисления выглядит как 10, т.е.*
  - $N_{10} = 10_N$

(т.е. $2_{10}=10_2$ – посмотрите в таблице, $8_{10}=10_8$, $16_{10}=10_{16}$ и т.д.).

Закономерность № 3.

- Степень любого основания в своей системе счисления выглядит как единица и количество нулей, равных степени, т.е.
  - $N^k = \underbrace{10\ldots0}_{k}{}_N$

(посмотрите в таблице: $4=2^2=100_2$, $8=2^3=1000_2$, тогда $16=2^4=10000_2$).

Закономерность № 4.

- Число, стоящее перед k-той степенью основания, в своей системе счисления выглядит как последовательность из k самых больших цифр этой системы счисления, т.е.
  - $N^k - 1 = \underbrace{(N\text{-}1)\ldots(N\text{-}1)}_{k}{}_N$

тогда $2^k - 1 = \underbrace{1\ldots1}_{k}{}_2$

$3^k - 1 = \underbrace{2\ldots2}_{k}{}_3$

$10^k - 1 = \underbrace{9\ldots9}_{k}{}_{10}$

(посмотрите в таблице: $3=2^2-1=11_2$, $7=2^3-1=111_2$, тогда $15=2^4-1=1111_2$).

Закономерность № 5.

- Длина числа при переводе десятичного числа в любую систему счисления легко определяется по формуле:

$$N^{L-1} \le Ch < N^L$$

где **Ch** – исходное число,
L - длина после перевода в систему счисления с основанием N.

(например: $2^2 \le 5 < 2^3$, тогда при переводе в двоичную систему счисления длина числа будет равна 3, посмотрите в таблице: $5=101_2$;

$2^3 \le 13 < 2^4$, тогда при переводе в двоичную систему счисления длина числа будет равна 3, посмотрите в таблице: $13=1011_2$).

Если ***закономерности 2, 3 и 4 применяются*** для быстрого и точного перевода чисел между системами счисления, то ***закономерность 5 удобно*** использовать для первичной проверки правильности перевода чисел из десятичной системы счисления в любую другую, что позволит сэкономить время на проверке результата перевода и даст возможность избежать ошибок).

Но использование закономерностей дает на еще ряд преимуществ!

Так, помня о нашем принципе быстрых и точных вычислений и в соответствии с закономерностями 2 и 3, рекомендуется выполнять перевод из десятичной системы счисления в двоичную разложением числа на степени двойки следующим образом. Вычитаем из числа степень двойки, которая меньше числа, но максимально приближенную к нему, Затем с остатком проделываем те же действия до тех пор, пока не разложим все число на степени двойки.

Например: $\mathbf{25 = 16 + 8 + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^0}$ **(25 – 16 = 9 ; 9 = 8 + 1)**

После этого, заменяем присутствующие степени двойки единицами (в соответствии с закономерностью 2), а пропущенные – нулями в порядке следования степеней, получая двоичную запись числа:

$$\mathbf{25 = 16 + 8 + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^0 = 11001_2}$$

(отсутствующие вторую и первую степени двойки заменяем нулями).

На чем еще можно сэкономить время и избежать ошибок?

Например, для перевода большого двоичного числа в десятичную систему счисления можно использовать в качестве промежуточной восьмеричную или шестнадцатеричную системы счисления:

$$\mathbf{110011101_2 = 110\ 011\ 101_2 = 635_8 = 5*8^0+3*8^1+6*8^2 = 5 + 24 + 384 = 413}$$

$$\mathbf{110011101_2 = 1\ 1001\ 1101_2 = 19D_{16} = 13*16^0+9*16^1+1*16^2 = 13 + 144 + 256 = 413}$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Решим несколько задач из ОГЭ по этой теме с использованием изложенных выше закономерностей.

Примечание. Так как любое число в нулевой степени равно единице, а любое число в первой степени равно самому числу, то при решении задач можно не писать степень в разряде единиц и десятков.

1. *Переведите двоичное число 1110101 в десятичную систему счисления.*

Решение: $1110101_2 = 1\ 110\ 101_2 = 165_8 = 5+6*8^1+1*8^2 = 5+48+64=117$

Или: $1110101_2 = 111\ 0101_2 = 75_{16} = 5+7*16^1=5+112=117$

2. *Переведите двоичное число 1100011 в десятичную систему счисления.*

Решение: $1100011_2 = 110\ 0011_2 = 73_{16} = 3+6*16^1=3+96=99$

3. Переведите число 135 из десятичной системы счисления в двоичную систему счисления. Сколько единиц содержит полученное число? В ответе укажите одно число —количество единиц.

Решение: $135 = 128+4+2+1= 2^7 + 2^2 + 2^1 + 2^0$

Ответ: 4

Этот ответ получен без окончательного перевода числа в двоичную систему счисления, достаточно посчитать количество двоек в степенях. Это позволяло сэкономить время решения задачи и избежать возможных ошибок при дальнейшей записи.

4. Переведите число 125 из десятичной системы счисления в двоичную систему счисления. Сколько единиц содержит полученное число? В ответе укажите одно число —количество единиц.

Решение: $125 = 127 – 2 = 1111111_2 - 10_2 = 1111101_2$

5. Переведите число FE из шестнадцатеричной системы счисления в двоичную систему счисления.

Решение**:** $FE_{16} = 1111\ 1110_2$ (используем запись тетрадами из таблицы «дружбы»).
Ответ: 11111110

6. Переведите число 143 из десятичной системы счисления в двоичную систему счисления. Сколько значащих нулей содержит полученное число? В ответе укажите одно число — количество нулей.

Решение: $143 = 128+8+4+2+1 = 2^7 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$, то пропущены всего три (6, 5 и 4) степени двойки, которые при записи двоичного числа заполняются нулями.
Ответ: 3

8. Переведите число 305 из десятичной системы счисления в двоичную систему счисления. Сколько единиц содержит полученное число? В ответе укажите одно число — количество единиц.

Решение: 305 = 256 + 32 + 16 + 1
(305+256=49, 49 - 32=17=16+1)

(т.к. в сложении участвуют всего 4 степени двойки, то результат будет содержать всего 4 единицы. Степени можно даже не писать)

Ответ: 4

Решениям задач из ЕГЭ будет посвящена отдельная методика.